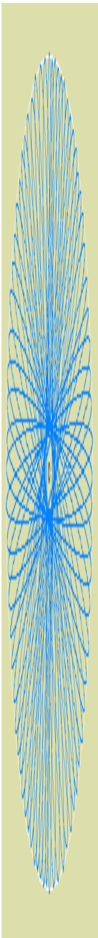
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μεταπτυχιακό Μάθημα
Ακαδημαϊκό έτος 2012-13 [*]
Καθηγητής: Σ. Πνευματικός



Ο όρος *δυναμικό σύστημα* δηλώνει κάθε σύστημα, φυσικό, χημικό, βιολογικό, οικονομικό, οικολογικό, κλπ, που εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος χαρακτηρίζεται, κάθε χρονική στιγμή, από ένα πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος παραμέτρων και το σύνολο των προσβάσιμων καταστάσεων ορίζει τον πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης *χώρο καταστάσεων*. Π.χ. Η διάδοση των κυμάτων στην ακουστική και την οπτική, οι ταλαντώσεις μιας χορδής ή μιας μεμβράνης, οι κινήσεις των ρευστών, έχουν απειροδιάστατους χώρους καταστάσεων, αφού δεν αρκεί ένα πεπερασμένο πλήθος παραμέτρων για την περιγραφή κάθε στιγμιαίας κατάστασής τους.

Αν σε κάποια χρονική στιγμή, π.χ. την αρχική στιγμή της παρατήρησης, η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος ορίζει μονοσήμαντα την εξέλιξή του στο χώρο των καταστάσεων, μελλοντική και παρελθούσα, λέμε ότι πρόκειται για *ντετερμινιστικό* σύστημα. Στην Κλασική Μηχανική, η *αρχή του ντετερμινισμού* του Νεύτωνα δηλώνει ότι η κατάσταση ενός συστήματος ορίζεται, κάθε χρονική στιγμή, από τη θέση και την ταχύτητά του. Έτσι, ο χώρος των καταστάσεων είναι το σύνολο των εφικτών θέσεων και ταχυτήτων του συστήματος και η παρούσα κατάστασή του ορίζει μονοσήμαντα το μέλλον και το παρελθόν της εξέλιξής του. Στη Θερμοδυναμική, η παρούσα κατάσταση ενός συστήματος ορίζει μονοσήμαντα το μέλλον αλλά όχι το παρελθόν της θερμοδυναμικής του εξέλιξης. Στην Κβαντική Μηχανική, η *αρχή της απροσδιοριστίας* του Heisenberg υποδεικνύει ότι η παρούσα κατάσταση δεν ορίζει μονοσήμαντα ούτε το μέλλον ούτε το παρελθόν της εξέλιξης.

Στα μαθήματα που ακολουθούν θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά ντετερμινιστικών δυναμικών συστημάτων σε χώρους καταστάσεων πεπερασμένης διάστασης των οποίων η εξέλιξη διέπεται από ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Προϋπόθεση για την κατανόηση αυτών των μαθημάτων αποτελεί η γνώση του προπτυχιακού μαθήματος των Δυναμικών Συστημάτων και του μαθήματος των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων.

[*] **Κείμενα Διδακτικών Σημειώσεων:**
Σπύρος Ν. Πνευματικός, Καθηγητής Γεωμετρίας & Μηχανικής, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Πατρών.
spn@eduscience.gr

Pierre Simon Laplace, 1814 :

"Πρέπει να αντιμετωπίζουμε την παρούσα κατάσταση του σύμπαντος ως αποτέλεσμα της προηγούμενης κατάστασής του και ως αιτία της επόμενης. Μια διάνοια που, σε μια δεδομένη στιγμή, θα γνώριζε όλες τις δυνάμεις που κινούν τη φύση και την αντίστοιχη κατάσταση των όντων που την αποτελούν, ενώ ταυτόχρονα θα ήταν τόσο ευρεία ώστε να μπορεί να αναλύει όλα τα δεδομένα, θα είχε τη δυνατότητα να συμπεριλάβει σε ένα σχήμα τόσο τις κινήσεις των μεγαλύτερων σωμάτων του σύμπαντος όσο και εκείνες των ελάχιστων ατόμων. Τίποτε δεν θα ήταν αβέβαιο για αυτήν, το μέλλον και το παρελθόν θα ήταν πάντα παρόντα στα μάτια της.".

Henri Poincaré, 1908 :

"Αν γνωρίζαμε ακριβώς τους νόμους της φύσης και την κατάσταση του σύμπαντος την αρχική στιγμή, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε επακριβώς τη μελλοντική του κατάσταση. Παρότι οι φυσικοί νόμοι δεν θα μας έκρυβαν πια τα μυστικά τους, δεν θα μπορούσαμε όμως να μάθουμε την κατάσταση παρά προσεγγιστικά. Αν αυτό μας επιτρέπει να προβλέψουμε τη μελλοντική κατάσταση με την ίδια προσέγγιση τότε λέμε ότι το φαινόμενο είχε προβλεφθεί. Αλλά, τα πράγματα δεν είναι πάντα έτσι. Μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες μπορεί να αποφέρουν τεράστιες διαφορές στα τελικά φαινόμενα, ένα ανεπαίσθητο αρχικό σφάλμα ίσως προκαλέσει ένα τεράστιο τελικό λάθος. Τότε, η πρόβλεψη είναι αδύνατη και τα φαινόμενα που προκύπτουν είναι τυχαία.".

"Οι δυνατότητες της ανθρώπινης σκέψης είναι περιορισμένες μπροστά στο εύρος των πολύπλοκων ζητημάτων που πρέπει να αντιμετωπίσει προκειμένου να υιοθετήσει μια ορθολογική συμπεριφορά. Πάντα υπάρχει μια ελάχιστη συνθήκη που μας διαφεύγει και ανατρέπει κάθε ανθρώπινη πρόβλεψη, μια μικρή ξεχασμένη αιτία που εκπλήσσει με τις απρόβλεπτες συνέπειές της. Ποιος μπορεί να προβλέψει το μέλλον; Κανείς, γιατί κανείς δεν είναι σε θέση να έχει πλήρη αντίληψη των δεδομένων. Όταν ο Heisenberg αποδεικνύει ότι ο παρατηρητής δεν μπορεί να γνωρίζει ακριβώς τη θέση ενός ηλεκτρονίου στο χώρο και το χρόνο τότε πώς είναι δυνατή η πρόβλεψη; Το παρόν δεν ορίζει μονοσήμαντα το μέλλον αφού στα μάτια μας αποκαλύπτονται περισσότερες από μια ενδεχόμενες εξελίξεις του ίδιου παρόντος. Σε αυτό ακριβώς έγκειται η αντιπαράθεση προς τη ντετερμινιστική αντίληψη του Laplace."

▷ **Βιβλιογραφία:**

Vladimir Arnold, ***Ordinary Differential Equations***, Cambridge MIT Press, 1973
J. Palis & W. De Melo, ***Geometric Theory of Dynamical Systems***, Springer-Verlag, 1982
Lawrence Perko, ***Differential Equations & Dynamical Systems***, Springer-Verlag, 1991
Α. Μπούντης, ***Μη Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις***, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1997.
C. Robinson, ***Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, Chaos***, CRC Press, 1999
David Betounes, ***Differential Equations***, Springer-Verlag, 2001
M. Hirsch, S. Smale, R.Devaney, ***Differential Equations & Dynamical Systems***, Els. Ac. Press, 2003
Stephen Wiggins, ***Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos***, Springer, 2003
James D. Meiss, ***Differential Dynamical Systems***, Siam, 2007
Σ. Πνευματικός, ***Θεμελιώδεις έννοιες της Γενικής Τοπολογίας***, Αθήνα 2000

ΜΑΘΗΜΑ 1ο

ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ας θεωρήσουμε ως παράδειγμα ένα σύστημα n χημικών ουσιών που υπεισέρχονται σε μια χημική αντίδραση. Η στιγμιαία κατάσταση κάθε ουσίας χαρακτηρίζεται από την αριθμητική τιμή της συγκέντρωσής της, άρα η στιγμιαία κατάσταση του συστήματος των χημικών ουσιών δηλώνεται με ένα σημείο στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$:

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \, .$$

Τα πειραματικά δεδομένα οδηγούν στον στατιστικό προσδιορισμό του ρυθμού μεταβολής των συγκεντρώσεων των αλληλεπιδρώντων χημικών ουσιών και στον ορισμό n συναρτήσεων σε ένα χωρίο του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$:

$$f_i : \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \, , \ \ i = 1, \ldots, n \, .$$

Έτσι, η εξέλιξη του συστήματος των χημικών ουσιών διέπεται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n) \, , \quad i = 1, \ldots, n \, .$$

Αν ο ρυθμός μεταβολής των συγκεντρώσεων είναι αρκετά ομαλός, π.χ. αν οι συναρτήσεις που τον εκφράζουν διαθέτουν συνεχείς παραγώγους, με τοπική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων προσδιορίζονται οι διαδοχικές καταστάσεις της εξέλιξης του συστήματος των χημικών ουσιών γνωρίζοντας απλά και μόνο την κατάστασή του σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Αυτό ακριβώς δηλώνει η *αρχή του ντετερμινισμού* που εκφράζεται με το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα, αν τη στιγμή $t_o \in \mathbb{R}$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$, η εξέλιξή του στο χώρο των καταστάσεων, μελλοντική και παρελθούσα, ορίζεται μονοσήμαντα στο χρονικό διάστημα της διάρκειάς της από τη λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων:

$$\phi_{x_o} : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n \, , \quad \phi_{x_o}(t_o) = x_o \, .$$

Η εξέλιξη του συστήματος, για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση, αναπαρίσταται με την προσανατολισμένη καμπύλη που ορίζεται από την εικόνα της αντίστοιχης λύσης και καλείται **τροχιά** της εξέλιξης στο χώρο των καταστάσεων:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{ \phi_{x_o}(t) \in \mathfrak{U} \, / \, t \in \mathrm{I} \right\} , \quad x_o \in \mathfrak{U} \, .$$

☑ Από γεωμετρική άποψη, τα πειραματικά δεδομένα ορίζουν στο χώρο των καταστάσεων ένα *διανυσματικό πεδίο* το οποίο προσαρτά σε κάθε κατάσταση το αντίστοιχο διάνυσμα που υποδεικνύει την κατεύθυνση και το ρυθμό μεταβολής των συγκεντρώσεων των χημικών ουσιών:

$$\mathcal{X} : \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \quad \mathcal{X}(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_n(x) \right),$$

και έτσι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων εκφράζεται διανυσματικά ως εξής:

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{X}(x) , \quad x \in \mathfrak{U} .$$

Από κάθε σημείο του καρτεσιανού γινομένου του χρονικού άξονα με το χώρο των καταστάσεων διέρχεται μια μόνο *ολοκληρωτική καμπύλη* ορισμένη από το γράφημα της αντίστοιχης λύσης και από την προβολή της στο χώρο των καταστάσεων προκύπτει η τροχιά που συναντά εφαπτομενικά τα αντίστοιχα διανύσματα του διανυσματικού πεδίου. Τα σημεία μηδενισμού του διανυσματικού πεδίου ορίζουν τις σημειακές τροχιές, δηλαδή τις *καταστάσεις ισορροπίας* του δυναμικού συστήματος:

$$\mathcal{X}(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_{x_o}(t) = x_o , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

☑ Η **εξελικτική ροή** ενός δυναμικού συστήματος προσαρτά σε κάθε αρχική κατάσταση την κατάσταση στην οποία θα βρεθεί ή βρέθηκε το σύστημα οποιαδήποτε δεδομένη μελλοντική ή παρελθούσα χρονική στιγμή. Συγκεκριμένα, όταν οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων ορίζονται σε όλο το χρονικό άξονα, κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, ορίζεται ο *μετασχηματισμός ροής*:

$$\mathfrak{g}^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} , \quad \mathfrak{g}^t(x_o) := \phi_{x_o}(t) , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Η αρχή του ντετερμινισμού εκφράζεται τότε με τη συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'} = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^t , \quad \forall t, t' \in \mathbb{R} .^*$$

Η συνθήκη αυτή διασφαλίζει ότι το σύνολο των μετασχηματισμών ροής, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης, αποκτά δομή αντιμεταθετικής ομάδας. Πρόκειται για τη *μονοπαραμετρική ομάδα* του δυναμικού συστήματος που τα στοιχεία της είναι αμφιδιαφορικοί μετασχηματισμοί του χώρου των καταστάσεων. Έτσι, ορίζεται ένας ομομορφισμός της προσθετικής ομάδας του χρονικού άξονα στην ομάδα των αμφιδιαφορομορφισμών του χώρου των καταστάσεων που σε κάθε χρονική στιγμή προσαρτά τον αντίστοιχο μετασχηματισμό ροής:

$$\left(\mathbb{R}, + \right) \to \left(\mathfrak{Diff}(\mathfrak{U}), \circ \right) .$$

* **Ερώτημα 1: Πώς θα σχολιάζατε το ότι η συνθήκη αυτή εκφράζει την αρχή του ντετερμινισμού;**
Τι είναι αυτό που διασφαλίζει την αμφιδιαφορισιμότητα των μετασχηματισμών ροής;

Η **εξελικτική ροή** του δυναμικού συστήματος ορίζεται στο διευρυμένο χώρο καταστάσεων, δηλαδή στο καρτεσιανό γινόμενο του χρονικού άξονα με το χώρο των καταστάσεων, ως εξής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} \, , \quad \mathfrak{g}(t, x_o) := \mathfrak{g}^t(x_o) \, .^*$$

Πρόκειται για διαφορίσιμη απεικόνιση ως προς το χρόνο που επαληθεύει τη σχέση:

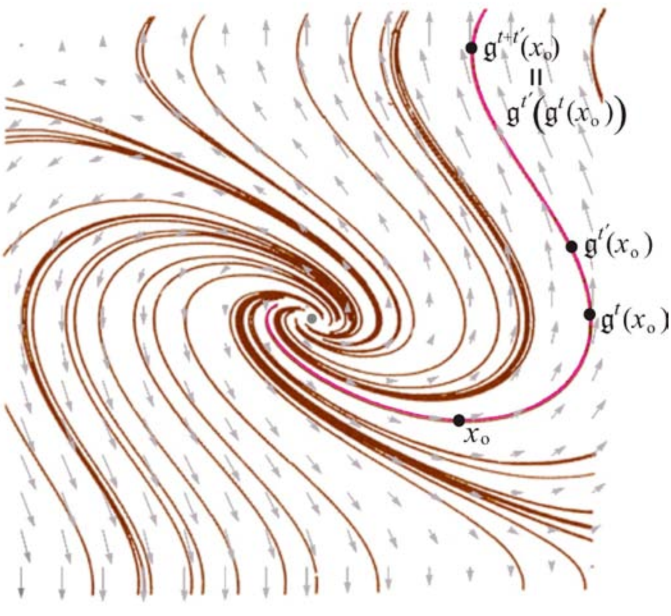
$$\partial_t \mathfrak{g}(t, x_o)\Big|_{t=t_o} = \mathcal{X}\left(\mathfrak{g}^{t_o}(x_o)\right) , \quad x_o \in \mathfrak{U} \, .$$

Η τροχιά που ορίζεται από κάθε δεδομένη κατάσταση εκφράζεται τώρα ως εξής:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{ \mathfrak{g}(t, x_o) \in \mathfrak{U} \, / \, t \in \mathbb{R} \right\} , \quad x_o \in \mathfrak{U} \, ,$$

και τα σταθερά σημεία της εξελικτικής ροής ορίζουν τις καταστάσεις ισορροπίας:

$$\mathcal{X}(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = x_o \, , \quad \forall t \in \mathbb{R} \, .$$



Μια άποψη δυναμικής εξέλιξης σε δισδιάστατο χώρο καταστάσεων:

$$\mathcal{X}(x) = \left(x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2), sin(x_1 + x_2) \right) .$$

---

* Αν οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων δεν ορίζονται σε όλο το χρονικό άξονα τότε λέμε ότι η εξελικτική ροή δεν είναι *πλήρης* και στην περίπτωση αυτή η μονοπαραμετρική ομάδα είναι *ψευδομάδα* που η δράση της περιορίζεται στα συμπαγή υποσύνολα του χώρου των καταστάσεων.

☑ Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων δηλώνει ότι κάθε αρχική συνθήκη ορίζει μονοσήμαντα μια μοναδική τροχιά στο χώρο των καταστάσεων και σε αυτήν προσαρτάται η **χρονική ομάδα**:

$$\mathfrak{T}_{x_o} = \{ t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}(t, x_o) = x_o \}, \;\; x_o \in \mathfrak{U} .$$

Πρόκειται για τοπολογικά κλειστή υποομάδα της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{R},+)$, άρα έχει μια από τις ακόλουθες τρεις μορφές: *

$$\mathfrak{T}_{x_o} = \{0\}, \quad \mathfrak{T}_{x_o} = \mathbb{R}, \quad \mathfrak{T}_{x_o} = \mathrm{T_o}\mathbb{Z} := \{ k\mathrm{T_o} \,/\, k \in \mathbb{Z} \}_{\mathrm{T_o} > 0} .$$

Η φύση κάθε τροχιάς δηλώνεται από τη φύση της χρονικής της ομάδας και ισχύουν τα εξής κριτήρια:

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{T}_{x_o} = \mathbb{R} & \Leftrightarrow & \mathcal{O}_{x_o} \text{ σημειακή τροχιά,} \\ \mathfrak{T}_{x_o} = \mathrm{T_o}\mathbb{Z} & \Leftrightarrow & \mathcal{O}_{x_o} \text{ περιοδική τροχιά,} \\ \mathfrak{T}_{x_o} = \{0\} & \Leftrightarrow & \mathcal{O}_{x_o} \text{ απεριοδική τροχιά.} \end{array}$$

☑ Η ταξινόμηση των δυναμικών συστημάτων ανάλογα με τη φύση των εξελικτικών τους ροών και των τροχιών τους στους χώρους καταστάσεων αποτελεί σπουδαίο ζητούμενο της μαθηματικής θεωρίας. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να εισαχθεί ένα κριτήριο ταξινόμησης, δηλαδή μια σχέση ισοδυναμίας, που να πληροί τα αξιώματα της ανακλαστικότητας, της συμμετρίας, της μεταβατικότητας, και έτσι προκύπτει ο διαμερισμός τους σε κλάσεις ισοδυναμίας. Λέμε ότι δυο δυναμικά συστήματα έχουν ισοδύναμη δυναμική συμπεριφορά ή ταυτόσημες εξελικτικές ροές στο χώρο των καταστάσεών τους $\mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, όταν υπάρχει αντιστρέψιμος μετασχηματισμός:

$$h : \mathfrak{U} \rightleftarrows \mathfrak{U}$$

τέτοιος ώστε:

$$h \circ \mathfrak{g}^t_{\mathrm{A}}(x_o) = \mathfrak{g}^t_{\mathrm{B}} \circ h(x_o), \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}, \; \forall t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή:

$$h\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{A}}(t, x_o)\big) = \mathfrak{g}_{\mathrm{B}}\big(t, h(x_o)\big), \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}, \; \forall t \in \mathbb{R} .$$

Η συνθήκη αυτή βασίζεται στη φύση των αντίστοιχων μονοπαραμετρικών ομάδων:

$$\{ \mathfrak{g}^t_{\mathrm{A}} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} \}_{t\in\mathbb{R}} \quad \text{και} \quad \{ \mathfrak{g}^t_{\mathrm{B}} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} \}_{t\in\mathbb{R}}$$

---

* **Ερώτημα 2: Ποιες είναι οι υποομάδες της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{R},+)$;**
Ποιος είναι ο λόγος που οι χρονικές ομάδες είναι τοπολογικά κλειστές;

και εκφράζεται με τη μεταθετικότητα των ακόλουθων διαγραμμάτων:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U} \arrow[r, "\mathfrak{g}^t_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "h"'] & \mathfrak{U} \arrow[d, "h"] \\ \mathfrak{U} \arrow[r, "\mathfrak{g}^t_{\mathrm{B}}"'] & \mathfrak{U} \end{tikzcd} \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Όταν οι εξελικτικές ροές δυο δυναμικών συστημάτων είναι ισοδύναμες τότε οι τροχιές του ενός μετασχηματίζονται αμφιμονοσήμαντα στις τροχιές του άλλου ως εξής:

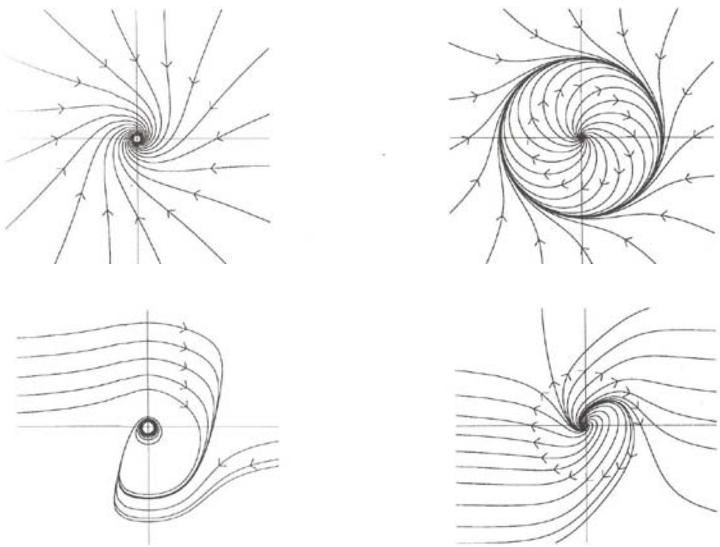
$$h\left(\mathcal{O}_{x_0}\right) = \mathcal{O}'_{h(x_0)}, \quad \forall x_0 \in \mathfrak{U} .$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ισοδυναμίας των εξελικτικών ροών που αφορούν στην τοπολογική, στη διαφορική και στην αλγεβρική φύση τους:

- **Τοπολογική ισοδυναμία**: $h \in \mathfrak{Hom}(\mathbb{R}^n)$ *Ομάδα ομοιομορφισμών* του $\mathbb{R}^n$,
- **Διαφορική ισοδυναμία**: $h \in \mathfrak{Diff}(\mathbb{R}^n)$ *Ομάδα διαφομορφισμών* του $\mathbb{R}^n$,
- **Γραμμική ισοδυναμία**: $h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ *Ομάδα ισομορφισμών* του $\mathbb{R}^n$.

Προφανώς:

$$h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; h \in \mathfrak{Diff}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; h \in \mathfrak{Hom}(\mathbb{R}^n) .$$



Παραδείγματα τροχιών δυναμικών συστημάτων σε δισδιάστατο χώρο καταστάσεων.[*]

---

[*] **Ερώτημα 3: Ποιες είναι οι χρονικές ομάδες των τροχιών των προηγούμενων παραδειγμάτων;**
Ποια πιστεύετε ότι είναι η τοπολογική σχέση των εξελικτικών τους ροών;